MATHEMATICS Proceedings A 88 (2), June 17, 1985

Groupes d'holonomie des feuilletages de Lie

par Etienne Ghys

UER de Mathématiques Pures et Appliquées ERA au CNRS 07590, Université des Sciences et Techniques de Lille I 59655 - Villeneuve d'Ascq Cedex - France

Communicated by Prof. W.T. van Est at the meeting of January 28, 1985

RÉSUMÉ

Nous décrivons des conditions nécessaires pour qu'un sous-groupe de génération finie d'un groupe de Lie G soit le groupe d'holonomie d'un G-feuilletage de Lie sur une variété compacte.

1. INTRODUCTION

Etant donné un feuilletage, on lui associe classiquement un "pseudo-groupe transverse". Nous nous intéressons ici aux contraintes que peut imposer la compacité de la variété ambiante à ce pseudo-groupe. Il est clair que le premier cas à envisager est celui où le pseudo-groupe est un groupe et plus précisément celui des feuilletages de Lie.

Fixons nous un groupe de Lie simplement connexe G. Rappelons brièvement qu'un "G-feuilletage de Lie" sur une variété compacte M est un feuilletage $\mathscr{F}$ défini par des submersions locales sur G, les changements de cartes transverses étant des translations à droite de G. Dans une telle situation, le relevé $\tilde{\mathscr{F}}$ de $\mathscr{F}$ dans le revêtement universel $\tilde{M}$ de M est défini par une fibration localement triviale D de $\tilde{M}$ sur G. Cette fibration est "l'application développante". De plus, il existe une représentation "d'holonomie" H, du groupe fondamental de M dans G, telle que $D(\gamma\cdot x)=D(x)H(\gamma)$ (où γ est un élément de $\pi_1(M)$ et $\gamma\cdot x$ désigne l'action de γ sur le point x de $\tilde{M}$). L'image Γ de H est un sous-groupe de G, appelé "*groupe d'holonomie de* $\mathscr{F}$". Ce sous-groupe, défini à conjugaison intérieure près, contient toute la "structure transverse de $\mathscr{F}$". Pour toutes ces notions, voir [Fe] ou [Th].

La question précise à laquelle nous nous intéressons ici est posée par A. Haefliger dans [Ha]; "Soit Γ un sous-groupe de G. Dans quelles conditions existe-t-il un G-feuilletage de Lie sur une variété compacte M dont le groupe d'holonomie est exactement Γ?". De manière générale, nous voudrions montrer que de tels Γ possèdent certaines propriétés arithmétiques (voir aussi [Mo], pour une autre approche de ce problème).

Deux conditions nécessaires apparaissent immédiatement.

1) Γ est de génération finie. En effet, Γ est l'image par H du groupe fondamental de la variété compacte M.

2) $G/\bar{\Gamma}$ est compact. En effet, on a toujours un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{M} \arrow[r, "D"] \arrow[d] & G \arrow[d] \\
M \arrow[r] & G/\bar{\Gamma}
\end{tikzcd}$$

de sorte que $G/\bar{\Gamma}$ est l'image du compact M.

Comme A. Haefliger le fait remarquer dans [Ha], la condition 1 est suffisante lorsque G est compact. Il suffit pour cela de considérer une variété compacte V dont le groupe fondamental se surjecte sur Γ et de suspendre l'action de $\pi_1(V)$ sur G ainsi obtenue. On obtient un G-feuilletage sur un G-fibré principal au-dessus de V dont l'holonomie est Γ.

De même, les conditions 1) et 2) sont suffisantes lorsque G est nilpotent. Cela découle des résultats de Malcev; sous la condition 1), Γ est uniforme discret dans un groupe de Lie nilpotent $\hat{\Gamma}$ et l'inclusion $i: \Gamma \to G$ se prolonge en un morphisme $\hat{i}: \hat{\Gamma} \to G$ qui sera surjectif sous la condition 2). Il est alors facile de construire un G-feuilletage de Lie sur $\hat{\Gamma}/\Gamma$ dont l'holonomie est Γ.

Lorsque G n'est ni compact ni nilpotent, nous donnons une condition nécessaire supplémentaire. Celle-ci est une inégalité portant sur la dimension cohomologique de Γ. Plutôt que de donner un énoncé précis (voir le § 2), décrivons en un corollaire:

THÉORÈME. Si Γ est un groupe libre (ayant au moins deux générateurs) et si G n'est pas compact, alors Γ ne peut pas être le groupe d'holonomie d'un G-feuilletage de Lie sur une variété compacte.

Le premier groupe non nilpotent est le groupe affine de la droite réelle (i.e. le groupe, noté GA, des matrices réelles du type

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $a>0$). Certains exemples de GA-feuilletages, dûs à A. Haefliger, ont des groupes d'holonomie ayant de fortes propriétés arithmétiques. Nous montrons au § 3 un résultat suggérant que ces exemples pourraient bien être les seuls GA-feuilletages de Lie sur des variétés compactes.

THÉORÈME. Soient

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_l & b_l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

l éléments de GA. Alors, le groupe engendré par ces éléments ne peut être le groupe d'holonomie d'un GA-feuilletage d'une variété compacte que si les $2l$ réels $a_1, b_1, \ldots, a_l, b_l$ sont algébriquement dépendants sur $\mathbb{Q}$.

Je remercie A. Haefliger pour avoir attiré mon attention sur ce problème ainsi que pour ses exemples de GA-feuilletages de Lie. Je remercie également Y. Carrière et V. Sergiescu pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

2. DIMENSION COHOMOLOGIQUE DES GROUPES D'HOLONOMIE

Si X est un CW-complexe, nous noterons $dcr(X)$ la "dimension cohomologique réelle" de X. Il s'agit de la borne supérieure (éventuellement infinie) de l'ensemble des entiers n tels qu'il existe un système local de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\{E\}$ sur X satisfaisant $H^n(X, \{E\}) \neq 0$. Si Γ est un groupe, nous noterons $dcr(\Gamma)$ l'entier $dcr(K(\Gamma, 1))$.

Cette notion de dimension cohomologique réelle est la plus petite des dimensions usuelles (dimension comme CW-complexe, dimension cohomologique obtenue à partir d'un module $\{E\}$ quelconque, dimension cohomologique virtuelle, i.e. le minimum des dimensions cohomologiques des revêtements finis...). Une minoration de la dimension cohomologique réelle est donc la meilleure possible.

THÉORÈME 2.1. Si K est un sous-groupe compact maximal du groupe de Lie simplement connexe G et si Γ est le groupe d'holonomie d'un G-feuilletage de Lie sur une variété compacte, alors

$$dcr(\Gamma) \geq \dim (G) - \dim K.$$

De plus cette inégalité ne peut être une égalité que dans le cas où Γ est uniforme et discret dans G.

Avant de démontrer ce résultat, donnons en deux corollaires dont le premier généralise l'énoncé donné dans l'introduction.

THÉORÈME 2.2. Soit Γ un groupe obtenu à partir de $\mathbb{Z}$ et de groupes finis à l'aide d'un nombre fini de produits libres et d'extensions finies (par exemple un groupe libre).

Si Γ n'est pas une extension finie de $\mathbb{Z}$ et G n'est pas compact, alors Γ ne peut pas être le groupe d'holonomie d'un G-feuilletage de Lie sur une variété compacte.

DÉMONSTRATION. Il est facile de voir que si Γ est un tel groupe, alors $dcr(\Gamma) \leq 1$ (voir [Sm]). L'inégalité donnée par le théorème 2.1 donne alors:

$$1 \geq dcr(\Gamma) \geq \dim G - \dim K.$$

Si G n'est pas compact, on a donc l'égalité:

$$\dim K = \dim G - 1$$

et Γ est uniforme et discret dans G.

Par conséquent, G est un groupe de Lie simplement connexe contenant un sous-groupe compact maximal de codimension 1; il a donc deux bouts. Puisque Γ est uniforme et discret dans G, c'est que Γ possède lui aussi deux bouts (voir [Ep]). D'après la classification des groupes à deux bouts, Γ est une extension finie de $\mathbb{Z}$. ■

PROPOSITION 2.3. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_l$ l matrices de $GL(n, \mathbb{R})$. Le groupe engendré par les A_i ne peut être le groupe d'holonomie d'un $GL(n, \mathbb{R})$-feuilletage de Lie sur une variété compacte que si les ln^2 coefficients des matrices A_i sont algébriquement dépendants sur $\mathbb{Q}$.

DÉMONSTRATION. Si w est un mot non trivial du groupe libre à l générateurs, on désigne par $\bar{w}: M_n(\mathbb{R})^l \to M_n(\mathbb{R})$ l'application polynomiale à coefficients rationnels consistant à évaluer w sur l matrices. Les sous-variétés algébriques $\bar{w}^{-1}(id)$ sont strictes car il existe des sous-groupes libres à l générateurs dans $GL(n, \mathbb{R})$. Si les coefficients des A_i sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$, le point $(A_1, A_2, \ldots, A_l)$ ne peut appartenir à aucune de ces sous-variétés $\bar{w}^{-1}(id)$ et le sous-groupe engendré par les A_i est alors libre. Ceci contredirait 2.2. ■

Pour démontrer 2.1, commençons par le lemme suivant:

LEMME 2.4. a) Soit $p: X \to B$ une fibration de Serre, de fibre F. Alors

$$dcr(X) \leq dcr(B) + dcr(F)$$

b) Soit $\pi: Y \to Z$ un revêtement galoisien de groupe Γ. Alors:

$$dcr(Z) \leq dcr(Y) + dcr(\Gamma).$$

DÉMONSTRATION. a) Si $\{E\}$ est un système local de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels sur X, il existe une suite spectrale E_*^{pq} telle que $E_2^{pq} = H^p(B; H^q(F, \{E\}))$ et convergeant vers la cohomologie de X à valeurs dans $\{E\}$. Si $p+q > dcr(B) + dcr(F)$, on a $p > dcr(B)$ ou $q > dcr(F)$, de telle sorte que $E_2^{pq} = 0$. Par conséquent, $H^{p+q}(Z, \{E\}) = 0$ et on a l'inégalité souhaitée.

b) On procède de même en utilisant la suite spectrale d'un revêtement galoisien. ■

DÉMONSTRATION DE 2.1. Soit $\pi: \bar{M} \to M$ le revêtement de M associé au noyau de la représentation d'holonomie H. Ce revêtement est galoisien, de groupe Γ. De plus, la fibration D de $\tilde{M}$ sur G passe au quotient en une fibration $\bar{D}$ de $\bar{M}$ sur G car $D(\gamma \cdot x) = D(x)$ si $\gamma \in \operatorname{Ker} H$. La fibre de $\bar{D}$ est difféomorphe à n'importe quelle feuille L du feuilletage considéré car Γ opère sans point fixe sur G. D'après le lemme précédent, appliqué à $\bar{D}$ et à π, on a:

$$dcr(\bar{M}) \leq dcr(G) + dcr(L)$$

$$dcr(M) \leq dcr(\bar{M}) + dcr(\Gamma).$$

Puisque M est une variété compacte, on a $dcr(M) = \dim M$. De même, L étant une variété, on a $dcr(L) \leq \dim (L)$, l'inégalité étant stricte sauf si L est compacte. Enfin, on sait qu'un groupe de Lie simplement connexe a le type d'homotopie d'un sous-groupe compact maximal K. On a donc $dcr(G) = \dim K$ puisque K est une variété.

On obtient alors:

$$dcr(\Gamma) \geq dcr(M) - dcr(\bar{M}) \geq \dim M - \dim K - \dim L$$

En remarquant que $\dim M - \dim L$ est la codimension du feuilletage, c'est-à-dire la dimension de G, on obtient l'inégalité désirée. Cette inégalité est stricte sauf si L est compacte, c'est-à-dire si le feuilletage est une fibration au-dessus d'un quotient compact G/Γ. C'est donc le cas exactement lorsque Γ est uniforme et discret dans G. ■

QUESTION 2.5. La dimension cohomologique réelle de groupe d'holonomie d'un G-feuilletage de Lie est-elle toujours finie si par exemple G est contractile?

3. FEUILLETAGES TRANSVERSALEMENT AFFINES

Nous considérons ici le cas du groupe de Lie GA des bijections affines de $\mathbb{R}$ préservant l'orientation. Commençons par décrire certains exemples, dûs à A. Haefliger.

Soit k un corps de nombre, $\mathscr{A}$ son anneau des entiers et U le groupe des unités de $\mathscr{A}$. Pour simplifier, nous ferons deux hypothèses sur k.

1) k est totalement réel, i.e. tout plongement de k dans $\mathbb{C}$ a son image contenue dans $\mathbb{R}$. Soit $i: k \to \mathbb{R}$ un de ces plongements.

2) si u est une unité de U telle que $i(u) > 0$, alors tous les conjugués u' de u satisfont aussi $i(u') > 0$.

Dans ces conditions, on a les propriétés suivantes; $\mathscr{A}$, comme groupe additif est isomorphe à $\mathbb{Z}^n$ où n est le degré de k sur $\mathbb{Q}$ et le groupe des unités u telles que $i(u) > 0$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^{n-1}$. (Voir [Sa]).

PROPOSITION 3.1. Sous les conditions 1) et 2) précédentes, il existe un GA-feuilletage de Lie sur une variété compacte dont le groupe d'holonomie est le groupe Γ des matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où a est un réel positif du type $i(u)$ $(u \in U)$ et b est l'image par i d'un entier de $\mathscr{A}$.

DÉMONSTRATION. Le groupe des unités opère sur le groupe additif des entiers. On a donc un produit semi-direct:

$$0 \to \mathbb{Z}^n \to \Gamma \to \mathbb{Z}^{n-1} \to 0.$$

Si u est une unité telle que $i(u) > 0$, l'action de u sur $\mathscr{A}$ est donnée par une matrice de $SL(n, \mathbb{Z})$. Si $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ désigne une base de $\mathbb{Z}^{n-1}$, notons $U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}$ les matrices correspondantes. Par hypothèse, toutes ces matrices ont toutes leurs valeurs propres positives et sont donc les exponentielles de matrices $\mathscr{U}_1, \mathscr{U}_2, \ldots, \mathscr{U}_{n-1}$ de $M(n, \mathbb{R})$. On peut donc "tensoriser" la suite exacte précédente par $\mathbb{R}$, pour obtenir un groupe de Lie G

$$0 \to \mathbb{R}^n \to G \to \mathbb{R}^{n-1} \to 0$$

où l'élément $(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})$ de $\mathbb{R}^{n-1}$ opère sur $\mathbb{R}^n$ par $\exp\,(t_1 \mathscr{U}_1 + t_2 \mathscr{U}_2 + \ldots + t_{n-1} \mathscr{U}_{n-1})$.

Il est clair que Γ se plonge dans G comme sous-groupe uniforme et discret. Pour construire un GA-feuilletage sur G/Γ, il nous suffit maintenant de construire un morphisme de G sur GA. Ce morphisme s'obtient aisément. Sur $\mathbb{R}^n$ on le définit en tensorisant tout d'abord par $\mathbb{R}$ l'injection i de $\mathbb{Z}^n \simeq \mathscr{A}$ dans $\mathbb{R}$ et en plongeant ensuite $\mathbb{R}$ dans GA par

$$b \mapsto \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sur $\mathbb{R}^{n-1}$, on définit le morphisme cherché en envoyant $(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})$ sur l'élément

$$\begin{pmatrix} i(u_1)^{t_1} i(u_2)^{t_2} \ldots i(u_{n-1})^{t_{n-1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de GA. On vérifie que ceci définit bien un morphisme et que l'holonomie du feuilletage obtenu est bien celle décrite dans l'énoncé de la proposition. ■

REMARQUE. Lorsque $n = 2$, on retrouve les exemples de flots de Lie sur les variétés de dimension 3 (voir [Ca]). En général, la variété ambiante est un fibré en tores T^n au-dessus du tore T^{n-1}. Les feuilles sont denses dès que $n \geq 3$.

Dans ces exemples, tous les coefficients des éléments du groupe d'holonomie sont algébriques. Rappelons que nous voulons montrer dans ce paragraphe le théorème suivant:

THÉORÈME 3.2. Soient

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_l & b_l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

l éléments de GA tels que les réels $(a_1, b_1, \ldots, a_l, b_l)$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Alors, le sous-groupe de GA engendré par ces éléments ne peut pas être le groupe d'holonomie d'un GA-feuilletage de Lie d'une variété compacte.

L'idée de la démonstration va consister à "déformer" des groupes d'holonomie pour se ramener à des groupes plus simples. Pour cela, il va falloir utiliser des "groupes d'holonomie" qui ne sont pas nécessairement plongés dans G. De manière précise, si Γ est un groupe de génération finie et si $\phi:\Gamma\to G$ est un morphisme non nécessairement injectif, à valeurs dans le groupe de Lie simplement connexe G, nous dirons que "ϕ est réalisable" s'il existe:

a) une variété compacte M munie d'un G-feuilletage de Lie

b) une surjection s de $\pi_1(M)$ sur Γ telles que, si H désigne la représentation d'holonomie de ce feuilletage, de $\pi_1(M)$ dans G, on a: $H=\phi\circ s$.

Indiquons un critère facile permettant de montrer que certains morphismes ne sont pas réalisables. Cependant, ce critère ne sera utile que lorsque $\phi(\Gamma)$ n'est pas dense dans G.

LEMME 3.3. Si $\phi:\Gamma\to G$ est réalisable et si l'on note $\overline{\phi(\Gamma)}_e$ la composante connexe de l'identité de l'adhérence de $\phi(\Gamma)$ dans G, alors $\phi(\Gamma)\cap\overline{\phi(\Gamma)}_e$ est de génération finie.

DÉMONSTRATION. On a toujours le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \tilde{M} \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[d] \\ M \arrow[r] & G/\overline{\phi(\Gamma)} \end{tikzcd}$$

Par conséquent, M fibre au-dessus de $G/\overline{\phi(\Gamma)}$. Soit F une fibre de cette fibration. Le feuilletage sur M est tangent à F et sa restriction à F est un feuilletage de Lie dont le groupe transverse n'est autre que $\overline{\phi(\Gamma)}_e$. Si $i:F\to M$ désigne l'inclusion et i_* le morphisme induit au niveau des groupes fondamentaux, le morphisme d'holonomie de la restriction du feuilletage à F est

$$H\circ i_*:\pi_1(F)\to\overline{\phi(\Gamma)}_e.$$

On a donc

$$\phi(\Gamma)\cap\overline{\phi(\Gamma)}_e=H\circ i_*(\pi_1(F))$$

qui est alors de génération finie puisque F est compacte. ■

Appliquons ce lemme au cas de GA.

LEMME 3.4. Soit $\phi:\Gamma\to GA$ un morphisme réalisable. Notons $A:GA\to\mathbb{R}_+^*$ le morphisme défini par

$$A\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)=a.$$

Si l'image de $A\circ\phi$ est infinie cyclique, alors celle-ci doit être constituée d'entiers algébriques.

DÉMONSTRATION. Si l'image de $A \circ \phi$ est engendrée par un élément $u>0$, l'image de ϕ ne peut être dense dans GA. L'adhérence de $\phi(\Gamma)$ est donc un sous-groupe de Lie de GA de dimension 0 ou 1. Tenant compte du fait que $GA/\overline{\phi(\Gamma)}$ doit être compact, on voit que $\overline{\phi(\Gamma)}$ doit être le groupe

$$\left\{\begin{pmatrix} u^n & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{R}\right\}$$

La composante connexe de l'identité de $\overline{\phi(\Gamma)}$ est identifiée à $\mathbb{R}$ par

$$b \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le groupe $\phi(\Gamma) \cap \overline{\phi(\Gamma)}_e$ est distingué dans $\phi(\Gamma)$. La conjugaison interne par un élément de $\phi(\Gamma)$ du type

$$\begin{pmatrix} u & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

opère par multiplication par u dans $\overline{\phi(\Gamma)}_e$ car:

$$\begin{pmatrix} u & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & ub \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'après le lemme précédent $\overline{\phi(\Gamma)}_e \cap \phi(\Gamma)$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ de génération finie. Ce sous-groupe devant être invariant par multiplication par u, il est bien connu que ceci entraîne le fait que u est entier algébrique. Il en est alors de même pour toutes les puissances de u, c'est-à-dire pour les éléments de $A \circ \phi(\Gamma)$. ■

Dans le but de nous ramener au lemme précédent, nous allons "perturber" un morphisme réalisable.

LEMME 3.5. L'ensemble des morphismes réalisables de Γ dans G est ouvert dans l'espace des morphismes de Γ dans G (ce dernier espace est muni de la topologie de la convergence uniforme sur un système fini de générateurs de Γ).

DÉMONSTRATION. Ce lemme est "bien connu". Voici une esquisse de démonstration. Si $\mathscr{F}$ est un G-feuilletage sur M, on peut suspendre la représentation de $\pi_1(M)$ dans G. On obtient un G-fibré E au-dessus de M muni d'un feuilletage "horizontal" $\bar{\mathscr{F}}$. De plus, il existe une section naturelle s de M dans E, fournie par le cocycle de définition de $\mathfrak{F}$, telle que s est transverse à $\bar{\mathscr{F}}$ et que $\mathscr{F} = s^*(\bar{\mathscr{F}})$. Si ϕ' est une représentation proche de la représentation donnée de $\pi_1(M)$ dans G, on peut réaliser la suspension de ϕ' sur le même espace total E, de telle sorte que le nouveau feuilletage horizontal $\bar{\mathscr{F}}'$ soit proche de $\bar{\mathscr{F}}$ et donc transverse à s. Le feuilletage $s^*(\bar{\mathscr{F}}')$ est alors un G-feuilletage dont la représentation d'holonomie est ϕ'. ■

LEMME 3.6. On se place dans les conditions du théorème 3.2. Soit $L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l)$ le groupe libre à l générateurs et Γ le sous-groupe de GA

engendré par

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_l & b_l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit j l'inclusion de Γ dans GA et π le morphisme naturel de $L(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ sur Γ, envoyant α_i sur

$$\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, hook, "j"] & GA \\ L(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \arrow[u, "\pi"] & \end{tikzcd}$$

Alors, tout morphisme de $L(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ dans GA se factorise à travers Γ.

DÉMONSTRATION. Le noyau de π est le groupe des "relations". Si w est un mot de $L(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ tel que $\pi(w) = \mathrm{id}$, on considère l'application $\bar{w}$ de $GA^l \to GA$ consistant à évaluer w sur un l-uplet de GA. Il s'agit d'une application polynomiale à coefficients rationnels. Puisque

$$\bar{w}\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_l & b_l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et que les éléments $(a_1, b_1, \ldots, a_l, b_l)$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$, c'est donc que la relation est identiquement vérifiée dans GA. C'est-à-dire que le noyau de π contient le noyau de tous les morphismes de $L(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ dans GA. ■

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.2. Supposons, par l'absurde, que l'inclusion $j: \Gamma \hookrightarrow GA$ est réalisable.

Approchons $j \circ \pi$ par un morphisme f de $L(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ dans GA tel que:

1. $A \circ f(\alpha_1)$ est transcendant
2. les réels $A \circ f(\alpha_i)$ sont des puissances rationnelles de $A \circ f(\alpha_1)$.

D'après le lemme 3.6, f s'écrit sous la forme $j_1 \circ \pi$ où j_1 est une représentation de Γ dans GA, proche de j. Celle-ci est encore réalisable d'après le lemme 3.5. et satisfait la condition du lemme 3.4. car le groupe engendré par les réels $A \circ f(\alpha_i)$ est cyclique. Le réel $A \circ f(\alpha_1)$ devrait alors être entier algébrique, ce qui est contraire à la condition 1. Ceci termine la démonstration du théorème 3.2. ■

Le résultat que nous venons de montrer suggère les questions suivantes:

QUESTION 3.7. Si G est un groupe résoluble, est-il vrai que le groupe d'holonomie d'un G-feuilletage de Lie d'une variété compacte est nécessairement polycyclique? (Cf. [Wo]).

QUESTION 3.8. Si G est contractile, le groupe d'holonomie Γ d'un G-feuilletage de Lie sur une variété compacte est-il toujours de présentation finie? $H_2(\Gamma, \mathbb{Z})$ est-il de génération finie?

BIBLIOGRAPHIE

[Ca] Carriere, Y. – Flots riemanniens, à paraître dans Astérique.

[Ep] Epstein, D.B.A. – Ends, Topology of 3-manifolds and related topics, Ed. M.K. Fort, Prentice-Hall 110–117 (1962).

[Fe] Fédida, E. – Feuilletages de Lie, feuilletages du plan, thèse Strasbourg, 1973, Lecture Notes in Mathematics n° 352, 183–195.

[Ha] Haefliger, A. – Groupoïdes d'holonomie et classifiants, à paraître dans Astérique.

[Mo] Molino, P. – Feuilletages de Lie à feuilles denses, Séminaire de Géométrie différentielle de Montpellier, 1983.

[Sa] Samuel, P. – Théorie algébrique des nombres, Hermann, Paris 1971.

[Sm] Smillie, J. – An obstruction to the existence of affine structures, Inventiones Math. **64**, 411–415 (1981).

[Th] Thurston, W. – The Geometry and Topology of 3-manifolds, Lectures Notes, Princeton.

[Wo] Wolf, J. – Growth of finitely generated solvable groups and curvature of riemannian manifolds, J. of. Diff. Geom. **2**, 421–446 (1968).